

Über die Konvergenz des Bornschen Näherungsverfahrens

Von P. URBAN und K. WILDERMUTH

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Graz
und dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. 8a, 594—598 [1953]; eingegangen am 23. Juli 1953)

An Hand einiger Beispiele wird die Konvergenz des Bornschen Verfahrens zur Behandlung von Streuproblemen in Abhängigkeit von Streupotential und der Stoßenergie untersucht.

Eines der wesentlichsten Näherungsverfahren für die Berechnung von Streuproblemen ist die Bornsche Näherung, bei der bekanntlich die Streuwellenfunktionen nach Potenzen des Kopplungsparameters entwickelt werden. Da diese Näherungen fast immer nur bis zur ersten, höchstens zweiten Näherung durchgeführt wurden, konnten dadurch keine Schlüsse über die Konvergenz des Bornschen Verfahrens gezogen werden.

In letzter Zeit haben nun Jost und Pais¹ und im Anschluß daran Kohn² durch Darstellung der Schrödinger-Gleichung für Streuprobleme in Form einer Integralgleichung versucht, den Konvergenzbereich der Bornschen Näherung in Abhängigkeit vom Kopplungsparameter in allgemeiner Weise abzuschätzen³. Da diese Verfasser sich im wesentlichen darauf beschränkt haben, das Bornsche Verfahren unter Annahme eines allgemeinen Wechselwirkungsansatzes zu diskutieren, scheint es uns angebracht, an einigen speziellen Beispielen, die sich auch exakt lösen lassen, den Konvergenzbereich des Bornschen Näherungsverfahrens explizit herzuleiten. Es stellt sich dabei heraus, daß zum Teil die Vermutungen, die besonders von Kohn ausgesprochen wurden, zumindest nicht allgemein gültig sind.

Weiterhin ist die Untersuchung solch spezieller Beispiele auch deshalb von großem physikalischen Interesse, da bei komplizierteren Streuproblemen, bei denen z. B. das Streupotential aus einer Überlagerung der später zu diskutierenden Potentialtypen besteht, die strenge Lösung nicht mehr explizit angegeben werden kann. Man kann in diesen Fällen einen Teil des Streupotentials nur mehr näherungsweise berücksichtigen. Die Konvergenz

des gesamten Verfahrens wird dann in der später zu besprechenden Weise von dem Teil des Gesamtspotentials bestimmt, der nur näherungsweise berücksichtigt wurde (s. z. B. ⁴).

Allgemeines über die Konvergenz des Bornschen Verfahrens

Entwickeln wir die Lösung eines Streuproblems nach Kugelfunktionen (Zerlegung in Partialwellen nach Drehimpulsen geordnet), so wird das Streuproblem bekanntlich dadurch beschrieben, daß bei den auslaufenden Wellen Phasenfaktoren $S(E)$ auftreten, die für die Bestimmung der Streuquerschnitte maßgebend sind (s. z. B. ⁵). Haben diese Phasenfaktoren den Absolutbetrag 1, so handelt es sich um elastische Streuung. Tritt neben der elastischen Streuung auch unelastische Streuung bzw. Einfang auf, so wird der Absolutbetrag des Phasenfaktors bei der elastischen auslaufenden Welle kleiner als 1. Über das genauere Verhalten dieser Phasenfaktoren wird in den anschließenden Beispielen einiges gesagt werden. Hierbei werden wir besonders auf die in ihnen auftretenden singulären Stellen eingehen müssen, da diese einen wesentlichen Einfluß auf den Konvergenzbereich des Bornschen Näherungsverfahrens haben, wie sich gleich zeigen wird.

Will man die Streuwellen mittels des Bornschen Verfahrens näherungsweise bestimmen, so treten jetzt die Phasenfaktoren als Potenzreihenentwicklung nach dem Kopplungsparameter ε auf. Nach dem üblichen Verfahren⁶ wird der Konvergenzbereich des Verfahrens bezüglich ε bei vorgegebener

¹ R. Jost u. A. Pais, Physic. Rev. 82, 840 [1951].

² W. Kohn, Physic. Rev. 87, 539 [1952].

³ Auf diese Arbeiten wurden wir freundlicherweise von Herrn Prof. W. Heisenberg und Herrn Dr. G. Lüders aufmerksam gemacht.

⁴ K. Wildermuth, Z. Naturforschg. 8a, 284 [1953].

⁵ W. Heisenberg, Theorie der Atomkerne, 1951.

⁶ S. z. B. die unter Anm. 1 und 2 zitierten Arbeiten.



Einfallsenergie E durch die dem Ursprung nächste Singularität des Phasenfaktors bezüglich \varkappa beschränkt. Dabei muß der Kopplungsparameter \varkappa als komplexe Variable aufgefaßt werden. Es ist daher der Konvergenzradius bzgl. der Variablen \varkappa eine Funktion von E . Wir schreiben dafür

$$\varkappa_{\text{Konv.}} = |\varkappa_{\text{Konv.}}| = f(E). \quad (1)$$

(Für $|\varkappa| < \varkappa_{\text{Konv.}}$ Konvergenz des Verfahrens.) Von eigentlichem physikalischen Interesse ist allerdings die Frage, für welche Streuenergien das Verfahren bei vorgegebener Kopplung \varkappa (\varkappa reell) konvergiert. Aus (1) folgt dafür als Bedingungsgleichung für die Einfallsenergie E

$$f(E) > |\varkappa|. \quad (2)$$

Diese Bedingungsgleichung für die Konvergenz der Bornschen Näherung in Abhängigkeit von der Streuenergie E wird jetzt an Hand verschiedener Beispiele erläutert werden.

Beispiele:

1. Streuung am abgeschnittenen Coulomb-Feld

Betrachten wir als Streupotential ein Coulomb-Feld, das im Abstand R vom Ursprung abgeschnitten wird, so ergibt sich bekanntlich für die Funktion $S(E)$

$$S(E) = e^{2i \frac{\varkappa_0}{\sqrt{E}} \ln \frac{2\sqrt{2mE}}{\hbar} R} \cdot \frac{\Gamma(1+l-i\frac{\varkappa_0}{\sqrt{E}})}{\Gamma(1+l+i\frac{\varkappa_0}{\sqrt{E}})}. \quad (3)$$

(E Einfallsenergie der Teilchen, l Drehimpulsquantenzahl,

$$\varkappa_0 = \frac{Ze_0^2}{\hbar^2} \sqrt{\frac{m}{2}},$$

Z Kernladungszahl, e_0 Elementarladung, m Masse des einfallenden Elektrons.)

In Gl. (3) wurden alle Glieder prop. $1/R$, $1/R^2$ usw. vernachlässigt. Eine genauere Abschätzung ergibt, daß dies für alle Wellenfunktionen mit Drehimpulsen $l \ll \sqrt{2mE} \cdot R$ erlaubt ist. Das ist physikalisch verständlich, da bei vorgegebener Einfallsenergie E die Teilchen mit dem Drehimpuls $\sqrt{2mE} \cdot R$ klassisch gesehen gerade im Abstand des Abschneideradius R am Ursprung vorbeifliegen.

Die Bornsche Näherung ergibt nun, wie man ohne weitere Erläuterung sieht, $S(E)$ als Potenzreihen-

entwicklung nach der Kopplungskonstanten \varkappa ⁷. Weiter sieht man, daß die Singularitäten von $S(E)$ bezüglich \varkappa durch die Pole der im Zähler stehenden Γ -Funktion bestimmt sind. Für $\varkappa_{\text{Konv.}}$ ergibt sich daher

$$\varkappa_{\text{Konv.}} = |\varkappa_{\text{Konv.}}| = (1+l) \sqrt{E}. \quad (4)$$

Daraus folgt bei vorgegebener Kopplung \varkappa , daß die Bornsche Näherung für

$$E > \frac{\varkappa^2}{(1+l)^2} \quad (5a)$$

konvergiert und für

$$E < \frac{\varkappa^2}{(1+l)^2} \quad (5b)$$

divergiert.

Aus (4) und (5) sieht man, daß der Konvergenzradius bezüglich der reziproken Energie $1/E$ mit wachsendem Drehimpuls wächst (s. Abb. 1). Hier sind für einige Energien bei vorgegebenem Drehimpuls die Konvergenzbereiche durch gestrichelte Pfeile angegeben.

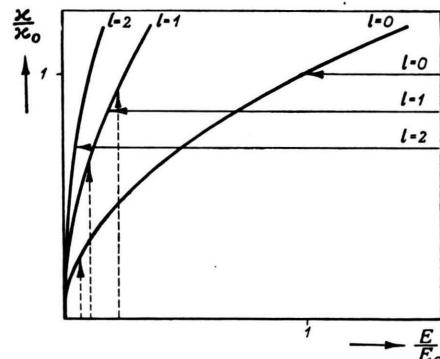


Abb. 1. Die mit $l = 0, l = 1, l = 2$ bezeichneten Kurven geben an, bis zu welcher Streuenergie herab, bei vorgegebenem Drehimpuls l und vorgegebener Kopplung \varkappa das Bornsche Verfahren konvergiert [s. Gl. (5b)]. E_0 Bindungsenergie des Grundzustandes des Wasserstoffatoms.

Das Anwachsen ist physikalisch verständlich, da bei vorgegebener Einfallsenergie E die einfallenden Teilchen mit wachsendem Drehimpuls am Streuzentrum weiter entfernt vorbeifliegen und daher die Streuwelle auch bei kleinen Energien noch verhältnismäßig klein bleiben wird. Weiter folgen die Bindungsenergien für die stationären Zustände beim $(1/r)$ -Potential ebenfalls aus den Singularitäten der

⁷ Die Bezeichnung der Kopplungskonstanten durch \varkappa statt durch \varkappa_0 soll deutlich machen, daß wir jetzt die Kopplung als variabel, d. h. die Elementarladung als variabel betrachten.

Γ -Funktion⁸. Man kann daher sagen, das Bornsche Verfahren divergiert beim $(1/r)$ -Potential, sobald die Einfallsenergie kleiner ist als der Absolutwert der Bindungsenergie des tiefsten Zustandes bei vorgegebenem Drehimpuls l . Dieses Ergebnis erscheint zunächst merkwürdig, da man z. B. aus der Streuung von Elektronen am Wasserstoffion, bzw. Wasserstoffatom weiß, daß die Bornsche Näherung auch bei Stoßenergien kleiner als die Bindungsenergie des Wasserstoffatoms im Grundzustand noch verhältnismäßig gut funktioniert⁹.

Die Erklärung für dieses Verhalten ist darin zu suchen, daß für Stoßenergien, die von derselben Größenordnung wie die Bindungsenergie des Wasserstoffatoms im Grundzustand sind, die Streuwellenfunktionen mit $l = 1, 2, 3, \dots$ usw. den Hauptbeitrag zum Wirkungsquerschnitt liefern. Für diese Streuwellenfunktionen konvergiert nach Gl. (4) und (5) bzw. Abb. 1 noch das Verfahren. Aus diesen Betrachtungen wird auch deutlich, daß die Übereinstimmung des Wirkungsquerschnittes beim $(1/r)$ -Potential, berechnet nach der exakten Methode und dem Bornschen Verfahren, dadurch zu stande kommt, daß sich die unterschiedlichen Glieder in den Wellenfunktionen bei der Berechnung des Wirkungsquerschnittes gerade wegheben. Wie man weiter sieht, gilt derselbe Konvergenzbereich auch im Falle eines abstoßenden Coulomb-Potentials, bei dem es keine Bindungszustände gibt.

Weiter kann man aus Abb. 1 sehen, daß beim Coulomb-Potential mit wachsender Einfallsenergie E der Konvergenzbereich bezüglich der Kopplungs- konstanten \varkappa für beliebigen Drehimpuls l stets monoton wächst. Das ist im Widerspruch mit der Vermutung 2 von Kohn², nach der für $l \geq 1$ zunächst ein Abfall des Konvergenzbereiches (bezügl. \varkappa) mit wachsender Einfallsenergie zu erwarten wäre.

Dagegen wird nach oben die Vermutung 3 von Kohn bestätigt, nach der die Existenz von gebundenen Zuständen ein Versagen der Bornschen Näherung bewirkt, wenn die Streuenergien gegen 0 gehen.

Das abgeschnittene Coulomb-Potential wurde gewählt, da beim reinen Coulomb-Potential, wegen seiner großen Reichweite, der Phasenverschiebungsfaktor der Streuwelle auch bei beliebig großem Ab-

⁸ W. Heisenberg, Z. Naturforschg 1, 11 [1946].

⁹ Bei diesen Problemen haben wir ein reines $(1/r)$ - Potential bzw. $(1/r)$ -Potentiale gemischt mit dem $(1/|r_1 - r_2|)$ -Potential der beiden Elektronen untereinander. Daher werden bei diesen Problemen, wie bereits in der Einleitung angedeutet wurde, die eben er-

stand vom Ursprung immer noch vom Ausgangsort der einfallenden Teilchen abhängt.

2. Streuung am Potentialtopf

Diesmal betrachten wir der Einfachheit halber nur die Streuung von Teilchen mit Drehimpuls Null. Für die Funktion $S(E)$ ergibt sich diesmal (siehe z. B.¹⁰)

$$S(E) = + e^{-2i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}r_0} \cdot \frac{\sqrt{\frac{E+\varkappa}{E}} \cos \sqrt{\frac{2m(E+\varkappa)}{\hbar^2}}r_0 + i \sin \sqrt{\frac{2m(E+\varkappa)}{\hbar^2}}r_0}{\sqrt{\frac{E+\varkappa}{E}} \cos \sqrt{\frac{2m(E+\varkappa)}{\hbar^2}}r_0 - i \sin \sqrt{\frac{2m(E+\varkappa)}{\hbar^2}}r_0} \quad (6)$$

(E Einfallsenergie der Teilchen, \varkappa Tiefe der Potentialmulde, r_0 Radius des Potentialtopfes, m Masse der einfallenden Teilchen).

Entwickelt man (6) analog zu vorhin in eine Potenzreihe nach \varkappa , so ist der Konvergenzradius dieser Reihe, bei gegebener Energie E , wieder durch die niedrigste singuläre Stelle bezüglich \varkappa bestimmt. Diese singuläre Stelle ergibt sich diesmal, wie man ohne weitere Erläuterung sieht, aus

$$\sqrt{\frac{E+\varkappa}{E}} = i \operatorname{tg} \sqrt{\frac{2m(E+\varkappa)}{\hbar^2}}r_0 \quad (7)$$

[Nullstellen des Nenners von (6)]. Da man es mit einer transzententen Gleichung zu tun hat, wurde die aus dieser Beziehung folgende Abhängigkeit von $|\varkappa|$ als Funktion von E (E reell) nur graphisch dargestellt (siehe Abb. 2)¹¹.

Aus dieser Abbildung kann man nun sofort die Konvergenz der Potenzreihe sowohl bezüglich des Potentials \varkappa als auch bezüglich der Einfallsenergie E ablesen. Bei gegebener Energie E wird analog zu vorhin die Konvergenz bezüglich \varkappa wegen Gl. (1) von unten nach oben abgelesen (Konvergenzbereiche für einige Energien durch gestrichelte Pfeile angedeutet), während man bei konstantem \varkappa die Konvergenz bezüglich E wegen Gl. (2) von rechts nach links ablesen muß. (Konvergenzbereiche für einige Potentiale \varkappa wieder durch ausgezogene Pfeile angedeutet.) Auf einen interessanten Punkt sei hier noch hingewiesen. Wie man aus Abb. 2 sieht, können bei vorgegebenem Potential \varkappa hier die Konvergenzbereiche bezüglich der Energie E durch Diver-

läuterten Divergenzeigenschaften des Bornschen Verfahrens in Erscheinung treten.

¹⁰ S. Flügge u. H. Marschall, Aufgaben zur Quantenmechanik, Springer-Verlag.

¹¹ Dazu muß man zunächst die Gl. (7), bei vorgegebenem positivem E , durch das komplexe \varkappa mit kleinstem Absolutbetrag lösen.

genzbereiche unterbrochen werden. Die Unstetigkeit der Konvergenzkurve in Abb. 2 kommt dadurch zustande, daß (7) bei gegebenem E unendlich viel Lösungen für α besitzt. Diese Lösungen in Abhängigkeit von E wechseln sich bei der Bestimmung der dem Ursprung zunächst gelegenen Singularität bezüglich α gegenseitig ab. Die gesamte Konvergenzkurve setzt sich daher aus einzelnen Kurvenästen zusammen. Wie man aus Abb. 2 entnehmen

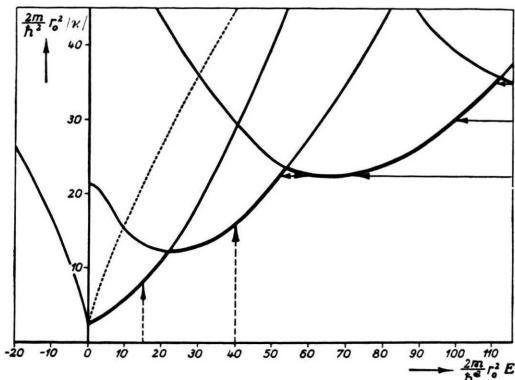


Abb. 2. (Die Beschriftung der Ordinate muß lauten $(2m/\hbar^2) r_0^2 |\alpha|$)

kann, besteht auch für Streuenergien $E \rightarrow 0$ noch ein endlicher Konvergenzradius für die Bornsche Näherung bezüglich der Potentialtiefe α . Das erklärt sich daraus, daß die Amplitude der Streuwelle mit der Streuenergie gegen Null geht. Aus Gl. (7) lassen sich bekanntlich auch die virtuellen Niveaus und die gebundenen Zustände bei vorgegebener Potentialtiefe α ermitteln (siehe z. B. ¹²⁾). Daher würde man zunächst vermuten, daß ein enger Zusammenhang zwischen den Konvergenzbereichen bezüglich der Energie E und der Lage der gebundenen Zustände und der virtuellen Niveaus bestehen müßte. Das ist aber im allgemeinen nicht der Fall, da die zur Bestimmung dieser Niveaus maßgebende Gl. (7) im Gegensatz zu vorhin, jetzt bei vorgegebenem positiven α durch komplexe (virtuelle Niveaus) bzw. durch negative (gebundene Zustände E -Werte gelöst werden muß. Die eben angedeutete Beziehung für die Bestimmung der virtuellen Niveaus, bzw. gebundenen Zustände, und die Beziehung für die Bestimmung der Konvergenzbereiche des Bornschen Verfahrens gehen im allgemeinen nur dann näherungsweise ineinander über, wenn das Verhältnis von Imaginärteil zu Realteil

der komplexen Energie eines virtuellen Niveaus sehr klein ist und dieses Niveau der dem Ursprung nächstgelegenen singulären Stelle zuzuordnen ist.

Nach dieser Überlegung sieht man, daß der enge Zusammenhang zwischen den Konvergenzbereichen und den gebundenen Zuständen beim Coulomb-Potential nur dadurch zustande kommt, daß in der Funktion S(E) die Stoßenergie E und der Koppelungsparameter nur in der Kombination α/\sqrt{E} auftreten.

Zu Beispiel 2 sei noch erwähnt, daß in Abb. 3 die Kurve $|\alpha_{\text{Konv.}}| = f(E)$ auch für negative E -Werte fortgesetzt wurde. Spiegelt man diesen Ast an der

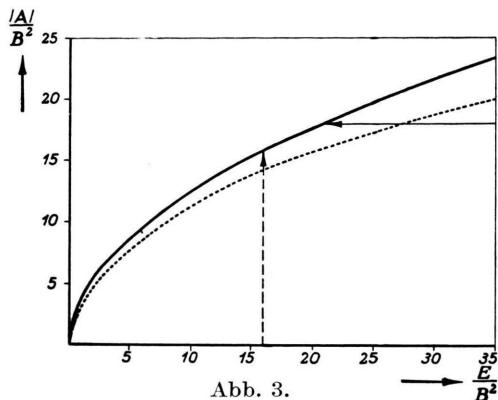


Abb. 3.

Ordinate (punktiert gezeichnet), so zeigt sich, daß dieser gespiegelte Ast vollständig zwischen der Konvergenzkurve und der Ordinate verläuft. Das bedeutet, daß das Bornsche Verfahren bereits für Streuenergien divergiert (bei diesem Potential), die größer sind als die Bindungsenergie der Streuteilchen im Grundzustand. Das ist wieder in Übereinstimmung mit der vorhin erwähnten Vermutung 3 von Kohn. Ähnliche Verhältnisse ergeben sich auch für die Streuwellen mit Drehimpuls l größer Null. Beispielsweise ist der Konvergenzbereich bezüglich E für diese Streuwellen analog beim Coulomb-Potential größer als der Konvergenzbereich für die Streuwellen mit Drehimpuls Null.

3. Eindimensionales Mehrkörperproblem

Zum Abschluß unserer Betrachtungen soll noch kurz ein Beispiel diskutiert werden, bei dem die einfallenden Teilchen an einem zusammengesetzten Teilchen gestreut werden. Hierzu greifen wir auf ein eindimensionales Beispiel zurück, das bereits in einer früheren Arbeit diskutiert wurde¹³ und das

¹² Th. Sexl, Vorlesungen über Kernphysik, Franz Deuticke, Wien.

¹³ K. Wildermuth, Acta physica austriaca 1953 (im Druck).

sich exakt integrieren läßt. Dort wird angenommen, daß sich ein unendlich schweres Teilchen am Ursprung befindet, an das vor der Streuung ein zweites Teilchen (Teilchen 2) mittels einer δ -funktionsartigen Wechselwirkung gebunden ist. An diesem System wird das Teilchen 1 gestreut (vor der Streuung beschrieben durch eine von beiden Seiten einlaufende Welle). Das Teilchen 1 tritt mit dem zusammengesetzten System nur in Wechselwirkung,

$$S(E) = \frac{\sqrt{E}(E+B^2) - \frac{A}{4}\sqrt{E} - \frac{A}{4\pi B}(E-B^2)\ln\frac{B-\sqrt{E}}{B+\sqrt{E}} - i\frac{AB}{2}}{\sqrt{E}(E+B^2) - \frac{A}{4}\sqrt{E} - \frac{A}{4\pi B}(E-B^2)\ln\frac{B-\sqrt{E}}{B+\sqrt{E}} + i\frac{AB}{2}}. \quad (8)$$

E ist die Einfallsenergie der Teilchen 1, B hierbei im wesentlichen die Kopplungskonstante für die Wechselwirkung der Teilchen 1 mit dem Ursprung, während A die Kopplungskonstante für die Wechselwirkung der Teilchen 1 und 2 (und dem Ursprung) darstellt. Die Bindungsenergie des Teilchens 2 am Ursprung ist $-B^2$ (l. c.¹³). Daher kann eine Ionisation des Teilchens 2 erst für Streuenergien größer B^2 stattfinden. Dieses Verhalten läßt sich sehr schön aus (8) ablesen. Wie man sieht hat $S(E)$ für $E < B^2$ den Absolutbetrag 1. Das bedeutet, daß für diese Energien nur eine elastische Streuung stattfindet. Dagegen wird der Absolutbetrag von $S(E)$ für $E > B^2$ kleiner 1. Das heißt, für $E > B^2$ kommt noch die Ionisationsstreuung hinzu.

Der Konvergenzradius bezüglich der Kopplungskonstanten A , der uns hier interessiert, ergibt sich analog zu früher aus der Nullstelle des Nenners von (8) zu

$$|A| = \frac{4\pi\sqrt{E}(E+B^2)}{\pi\sqrt{E} + \frac{E-B^2}{B}\ln\frac{B-\sqrt{E}}{B+\sqrt{E}} - i2B} \quad (9)$$

In Abb. 3 ist dieser Funktionsverlauf graphisch aufgetragen.

Die Konvergenz der Potenzreihenentwicklung nach A bezüglich der Kopplungskonstante A und der Stoßenergie E wird analog zu Beispiel 2 abgelesen. Außerdem ist in Abb. 3 wieder der Absolutwert der Bindungsenergie des Teilchens 1 mit dem zusammengesetzten Teilchen (nur ein Bindungszustand) aufgetragen (punktierte Kurve). Man sieht, daß bei diesem Beispiel diese Kurve in den Konvergenzbereich hineinfällt. Das bedeutet, daß hier die Bornsche Näherung im Gegensatz zu Beispiel 1 und

wenn sich das Teilchen 2 am Ort des unendlich schweren Teilchens (Ursprung) befindet (Mehrkörerkraft).

Hierbei wurde diese Wechselwirkung so gewählt, daß das Beispiel sich exakt integrieren läßt und dabei doch noch die allgemeinen Eigenschaften der Streuprobleme erhalten bleiben¹³.

Als Funktion $S(E)$ (Faktor vor der nach beiden Seiten auslaufenden Welle) ergibt sich in diesem Fall

noch bei Stoßenergien konvergiert, die kleiner sind als der Absolutbetrag der eben erwähnten Bindungsenergie für das Teilchen 1. Im wesentlichen liegt es aber daran, daß bei diesem Beispiel die Teilchen 1 und 2 nur dann miteinander wechselwirken können, wenn das Teilchen 2 sich am Ursprung befindet. Weiter ergibt sich bei diesem Beispiel, wie nur erwähnt sei, daß die Entwicklung der Ionisationswelle nach A denselben Konvergenzbereich bezüglich E besitzt, wie die elastische Streuwelle. Das bedeutet, daß für kleines A ¹⁴ die Entwicklung der Ionisationswelle nach A für jede Einfallsenergie E konvergiert, da erst für $E > B^2$ Ionisation eintreten kann. Es scheint sehr plausibel, daß das Letztere allgemeine Gültigkeit für Streuung an zusammengesetzten Teilchen besitzt.

Die zu 1 und 2 analoge Untersuchung des Streupotentials wurde vorläufig zurückgestellt, da man dazu die Nullstellen der Bessel-Funktionen mit komplexem Index und komplexem Argument braucht und die hierfür nötigen Tabellierungen nicht vorliegen.

Ganz analoge Überlegungen gelten auch für die Diracsche Störungsrechnung, deren Ergebnisse bekanntlich bei der Behandlung von stationären Streuproblemen vollständig mit den mittels der Bornschen Näherung erhaltenen Ergebnissen übereinstimmen.

Wir wollen an dieser Stelle nicht versäumen, Herrn cand. phil. Stippel, Fr. cand. phil. Kassecker und vor allem Herrn cand. phil. Repp für die zahlreichen numerischen Rechnungen zu danken, die für die Arbeit notwendig waren.

¹⁴ Z. B. wenn die Bindungsenergie des Teilchens am zusammengesetzten Teilchen kleiner B^2 ist.